ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES
OPTION MATHEMATIQUES (M')

TROISIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES
(Durée : 2 heures)

Le correcteur demande aux candidats d'encadrer les résultats obtenus et de rédiger avec le plus grand soin leurs démonstrations. Un raisonnement vague ou incomplet ne pourra pas être pris en considération.

Les candidats pourront, pour traiter une question, utiliser les résultats des questions antérieures à la condition expresse de le mentionner explicitement.

Les questions 10°] et 11°] sont, dans une certaine mesure, indépendantes des précédentes.

On rappelle que, sur un espace vectoriel réel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Soient $a \in (-\infty) \cup \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup (+\infty)$, avec $a < b$ et $R(x)$ une fraction rationnelle réelle non identiquement nulle.

Soit p (resp. q) le nombre de pôles α (resp. β) appartenant à l'ouvert $]a,b[$ tels que

$$\lim_{\substack{x \to \alpha \\ x < \alpha}} R(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} R(x) = +\infty$$

$$\left(\text{resp.} \lim_{\substack{x \to \beta \\ x < \beta}} R(x) = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to \beta \\ x > \beta}} R(x) = -\infty \right) .$$

L'entier $I_a^b(R) = p - q$ est appelé l'indice de R sur $]a,b[$.

I

1°) Calculer l'indice $I_{-\infty}^{+\infty}(R)$ de la fraction rationnelle suivante :

$$R(X) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{X - j}$$

2°) On pose :

$$F(x) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant p} (x - \alpha_j)^{n_j} \prod_{1 \leqslant \ell \leqslant q} \left((x - a_\ell)^2 + b_\ell^2\right)^{m_\ell}$$

où les réels α_j, $1 \leqslant j \leqslant p$, sont deux à deux distincts, les couples de réels (a_ℓ, b_ℓ), $1 \leqslant \ell \leqslant q$, sont deux à deux distincts (avec b_ℓ strictement positif, $1 \leqslant \ell \leqslant q$) et où les n_j, m_ℓ, $1 \leqslant j \leqslant p$, $1 \leqslant \ell \leqslant q$, sont des entiers naturels.

Calculer alors $I_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{F'}{F}\right)$.

Soient $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. On considère une suite finie $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ de polynômes réels.

On note (S_1) et (S_2) les deux propriétés suivantes relativement à l'ouvert $]a,b[$:

(S_1) : $\forall\, x \in]a,b[$, si $f_k(x) = 0$ pour $k \in \{2, \ldots, m-1\}$ et $m \geqslant 3$,

alors $f_{k-1}(x)\, f_{k+1}(x) < 0$;

si $f_1(x) = 0$ alors $f_2(x) \neq 0$.

(S_2) : $f_m(x)$ ne s'annule jamais sur $]a,b[$.

Si $x \in]a,b[$, on note $V(x)$ le nombre de variations strictes de signe consécutives dans le m-uplet : $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ en convenant d'omettre les éléments égaux à zéro dans le m-uplet (tout en conservant l'ordre des éléments).

Par exemple : si $(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = (-1, 1, -2)$, $V(x) = 2$
et si $(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = (-1, 0, 1)$, $V(x) = 1$.

3°] On suppose que (S_1) et (S_2) sont vérifiées.

a) Montrer que $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} V(x)$ $\left[\text{resp. } \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} V(x)\right]$ existe, on note V(a) [resp. V(b)] cette limite.

b) Exprimer $I_a^b\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$ en fonction de V(b) et de V(a) dans le cas particulier où m = 3 . Montrer que cette formule est encore vraie dans le cas général.

Dans la suite du problème, on considère un polynôme <u>à coefficients réels</u>

$$f(z) = a_o z^n + b_o z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \ldots + b_{p-1} z + a_p, \text{ si } n = 2p$$

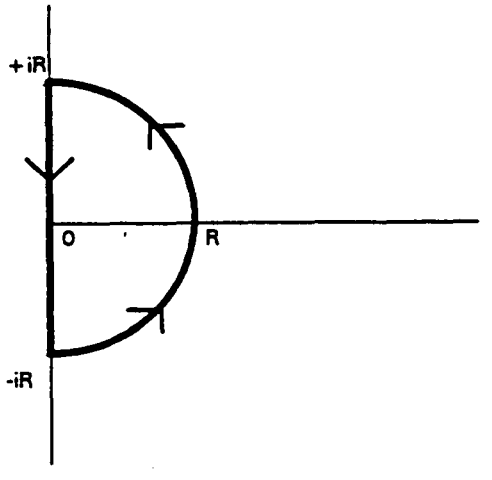
et $f(z) = a_o z^n + b_o z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \ldots + a_p z + b_p$, si $n = 2p+1$

où a_o et b_o sont non nuls.

On suppose que f(z) n'admet aucune racine (imaginaire pure) sur l'axe $i\mathbb{R}$ et admet exactement k racines complexes dans le demi-plan Re(z) > 0.

On considère un réel strictement positif R suffisamment grand de sorte que les k racines de f(z) de partie réelle strictement positive appartiennent toutes au demi-disque ouvert de centre 0 et de rayon R.

On oriente le plan complexe de la manière usuelle (sens inverse des aiguilles d'une montre).



4°] Déterminer l'accroissement $\Delta \arg f$ de l'argument $\arg f(z)$ de $f(z)$ quand z décrit le chemin suivant : $Re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$; puis $tRe^{i\pi/2}$, $1 \geqslant t \geqslant -1$; puis $Re^{i\theta}$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 0$. (On commencera par traiter le cas où $f(z) = z - z_1$ pour un nombre complexe z_1 donné).

5°] Exprimer l'accroissement $\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg f(i\omega)$ de $\arg f(z)$, quand z décrit l'axe imaginaire pur, en fonction de n et de k.

II

On considère après le polynôme f, les polynômes suivants :

$$f_1(\omega) = a_0\omega^n - a_1\omega^{n-2} + a_2\omega^{n-4} - a_3\omega^{n-6} + \ldots$$

$$f_2(\omega) = b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + b_2\omega^{n-5} - a_3\omega^{n-7} + \ldots$$

les termes de plus bas degré étant définis comme pour f selon la parité de n.

On définit également la suite $f_1(\omega), f_2(\omega), f_3(\omega), \ldots, f_{n+1}(\omega)$ par l'algorithme d'Euclide :

- $f_3(\omega)$ [resp. $-f_4(\omega)$] est le reste de la division euclidienne de $f_1(\omega)$ [resp. $f_2(\omega)$] par $f_2(\omega)$ [resp. $f_3(\omega)$] ... etc.

On supposera que $\forall\, i \in \{1,2,\ldots,n+1\}$, degré de $f_i(\omega) = n+1-i$ et que $f_{n+1}(\omega)$ est non nul .

6°]a) Exprimer l'indice $I_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$ en fonction de n et de k dans le cas où n est pair.

b) Même question dans le cas où n est impair.

7°] Montrer que pour chaque entier naturel $\ell \leqslant \frac{n}{2}$ $\left[\text{resp. } \ell \leqslant \frac{n-1}{2}\right]$ on peut écrire

$$f_{2\ell+1}(\omega) = a_0^\ell\, \omega^{n-2\ell} - a_1^\ell\, \omega^{n-2\ell-2} + a_2^\ell\, \omega^{n-2\ell-4} - \ldots$$

$$\left[\text{resp. } f_{2\ell+2}(\omega) = b_0^\ell\, \omega^{n-1-2\ell} - b_1^\ell\, \omega^{n-2\ell-3} + b_2^\ell\, \omega^{n-2\ell-5} - \ldots\right]$$

où les a_j^ℓ , b_j^ℓ sont des nombres réels qu'on ne demande pas d'expliciter.

On forme le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
a_o & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\
b_o & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\
a_o^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & \dots \\
b_o^1 & b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 & b_4^1 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a_o^p & a_1^p & a_2^p & a_3^p & a_4^p & \dots \\
b_o^p & b_1^p & b_2^p & b_3^p & b_4^p & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

et si n est pair = 2q la dernière ligne écrite est :

$$a_o^q \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots.$$

alors que si n est impair = 2q+1 la dernière ligne écrite est

$$b_o^q \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots.$$

8°) Enoncer une règle simple permettant d'obtenir la $p^{ième}$ ligne, du tableau précédent en fonction des lignes antérieures.

Lorsque $x \in [-\infty, +\infty]$ on note $V(x)$ le nombre de variations strictes de signe consécutives dans le n+1-uplet $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n+1}(x))$ en convenant d'omettre les éléments du n+1-uplet égaux à zéro, tout en conservant l'ordre des éléments. (On convient que $f_j(+\infty) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} f_j(x)$) .

9°)a) Exprimer $V(-\infty) - V(+\infty)$ en fonction de k et de n.

b) Déterminer $V\left(a_o, b_o, a_o^1, b_o^1, \dots, a_o^p, b_o^p, \dots\right)$ = le nombre de variations strictes consécutives de signe (en convenant d'omettre les éléments égaux à zéro et en conservant l'ordre des éléments) dans la première colonne du tableau précédent en fonction de k et de n. (On calculera $V(+\infty) + V(-\infty)$) .

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante très simple portant sur la première colonne du tableau pour que f(z) n'ait aucun zéro de partie réelle strictement positive .

III

10°)a) Montrer qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n) telle que : $\det(A - zId) = \frac{(-1)^n}{a_o} f(z)$, où Id désigne la matrice identité. Dans la suite on fixe un tel A.

b) Soit Λ un segment (non réduit à un point) ou un cercle (de rayon strictement positif) de $\mathbb{C}$. Montrer que $\|P\|_\Lambda = \sup_{t \in \Lambda} |P(t)|$ définit une norme sur l'espace E_n des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

c) Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de $M_n(\mathbb{R})$ convergeant vers A au sens d'une norme quelconque, montrer que $\exists\, N > 0$ tel que $\forall\, p \geqslant N$:

(i) A_p n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire pur

et (ii) A_p a exactement k valeurs propres de partie réelle > 0 .

11°)a) Soient $x_o \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $R > 0$.

Calculer la quantité $\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}\, d\theta}{x_o + Re^{i\theta} - \lambda}$ dans le cas $|\lambda - x_o| < R$ puis dans le cas $|\lambda - x_o| > R$.

b) Soit P(X) un polynôme réel de degré inférieur ou égal à n, ne s'annulant pas sur le cercle de centre x_o et de rayon $R > 0$.

Exprimer $\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{P'\left(x_o + Re^{i\theta}\right) iRe^{i\theta}\, d\theta}{P\left(x_o + Re^{i\theta}\right)}$ en fonction de la position des zéros de P .

c) Soit $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices trigonalisables (sur $\mathbb{R}$) de $M_n(\mathbb{R})$ convergeant vers B.

En déduire que B est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.